中級統計学：第 2 回中間試験

村澤 康友

2023 年 11 月 17 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a) 独立かつ同一なベルヌーイ試行における r 回成功までの失敗回数の分布
   (b) 任意の (x,y) について $F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ となる $f_{X,Y}(.,.)$
   (c) 任意の (x,y) について $f_{X|Y}(x|Y=y)=f_X(x)$ である性質
   (d) 畳み込んでも分布の型が変わらない性質
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(2,4)$ と $Y \sim \mathrm{N}(3,9)$ は独立とする．標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい．
   (a) $\Pr[X>0]$
   (b) $\Pr[1<Y\le 2]$
   (c) $\Pr[2X-Y\le 3]$
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X,Y) は以下の同時分布に従う．

$X\backslash Y$	0	1
0	3/10	1/10
1	3/10	3/10

   (a) X,Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   (b) X,Y の平均と分散をそれぞれ求めなさい．
   (c) XY の平均と分散を求めなさい．
   (d) X と Y の共分散と相関係数を求めなさい．
   (e) $X-Y$ の平均と分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 負の 2 項分布
      - 「パスカル分布」でも OK.
      - 「幾何分布」は 1 点.
   (b) 同時確率密度関数
   (c)（確率変数の）独立性
   (d) 再生性
2. 正規分布の確率計算（以下では $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とする）
   (a)

$$\begin{aligned}\Pr[X>0] &= \Pr\left[\frac{X-2}{2} > \frac{0-2}{2}\right]\\ &= \Pr[Z>-1]\\ &= \Pr[Z<1]\\ &= 1-\Pr[Z\geq 1]\\ &= 1-.15866\\ &= .84134\end{aligned}$$

      - $\Pr[Z<1]$ で 5 点.

   (b)

$$\begin{aligned}\Pr[1<Y\leq 2] &= \Pr\left[\frac{1-3}{3} < \frac{Y-3}{3} \leq \frac{2-3}{3}\right]\\ &= \Pr\left[-\frac{2}{3} < Z \leq -\frac{1}{3}\right]\\ &= \Pr\left[\frac{1}{3} \leq Z < \frac{2}{3}\right]\\ &= \Pr\left[Z\geq\frac{1}{3}\right] - \Pr\left[Z\geq\frac{2}{3}\right]\\ &= .37070-.25143\\ &= .11927\end{aligned}$$

      - $\Pr[1/3 \leq Z < 2/3]$ で 5 点.

   (c) $2X-Y \sim \mathrm{N}(1,25)$ より

$$\begin{aligned}\Pr[2X-Y\leq 3] &= \Pr\left[\frac{2X-Y-1}{5} \leq \frac{3-1}{5}\right]\\ &= \Pr\left[Z\leq\frac{2}{5}\right]\\ &= 1-\Pr\left[Z>\frac{2}{5}\right]\\ &= 1-.34458\\ &= .65542\end{aligned}$$

      - $2X-Y \sim \mathrm{N}(1,25)$ で 5 点.

3. 2 変量離散分布

（a）

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 2/5 \\ 1 & \text{with pr. } 3/5 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/5 \\ 1 & \text{with pr. } 2/5 \end{cases}$$

（b）X の平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \\ \mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{2}{5} + 1^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \\ \mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{6}{25} \end{aligned}$$

Y の平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &:= 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \\ \mathrm{E}\left(Y^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \\ \mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\ &= \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{6}{25} \end{aligned}$$

- 平均各 2 点，分散各 3 点.
- 分散の計算公式で各 1 点.

（c）XY の分布は

$$XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 7/10 \\ 1 & \text{with pr. } 3/10 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &:= 0 \cdot \frac{7}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \\ \mathrm{E}\left((XY)^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{7}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \\ \mathrm{var}(XY) &= \mathrm{E}\left((XY)^2\right) - \mathrm{E}(XY)^2 \\ &= \frac{3}{10} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 \\ &= \frac{21}{100} \end{aligned}$$

- 平均 5 点，分散 5 点.

- 分散の計算公式で 2 点.

（d）共分散は

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{3}{10} - \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} \\
&= \frac{3}{50}
\end{aligned}
$$

相関係数は

$$
\begin{aligned}
\operatorname{corr}(X,Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}} \\
&= \frac{3/50}{6/25} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

- 共分散 5 点，相関係数 5 点.
- 共分散と相関係数の計算公式で各 1 点.

（e）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X-Y) &= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{5} \\
\operatorname{var}(X-Y) &= \operatorname{var}(X) - 2\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y) \\
&= \frac{6}{25} - 2\cdot\frac{3}{50} + \frac{6}{25} \\
&= \frac{9}{25}
\end{aligned}
$$

- 平均 5 点，分散 5 点.
- $\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)$ で 2 点.
- $\operatorname{var}(X-Y) = \operatorname{var}(X) - 2\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y)$ で 2 点.

（別解）$X-Y$ の分布は

$$
X - Y = \begin{cases} -1 & \text{with pr. } 1/10 \\ 0 & \text{with pr. } 6/10 \\ 1 & \text{with pr. } 3/10 \end{cases}
$$

この平均と分散を (c) と同様に計算してもよい.