中級統計学：第 1 回中間試験

村澤 康友

2024 年 10 月 18 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   (a)（ローレンツ曲線と 45 度線の間の面積）÷（45 度線の下の面積）
   (b) 2 変量データの度数分布表
   (c) 試行の結果によって値が決まる変数
   (d) 2 次の中心積率
2. （30 点）「交通安全白書（令和 5 年）」によると，平成 25〜令和 4 年の日本の自転車乗用中の交通事故死者数は 4,680 人，同負傷者数は 858,436 人であった．また死傷者（死者または負傷者）863,116 人中のヘルメット着用者数は 77,526 人，死者 4,680 人中のヘルメット着用者数は 186 人であった．すなわち交通事故におけるヘルメット着用の事象を A，交通事故死の事象を B とすると，

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{77526}{863116} \approx 0.09 \\
P(B) &= \frac{4680}{863116} \approx 0.005 \\
P(A|B) &= \frac{186}{4680} \approx 0.04
\end{aligned}
$$

   以下の確率を分数で正確に求めなさい．
   (a) $P(A \cap B)$
   (b) $P(B|A)$（ヘルメット着用者の致死率）
   (c) $P(B|A^c)$（ヘルメット非着用者の致死率）
3. （50 点）X は次の累積分布関数をもつ．

$$
F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 2 \\ 1 - 2/x & \text{for } x > 2 \end{cases}
$$

   $Y := 1/X$ とする．
   (a) $\Pr[1 < X \le 3]$ を求めなさい．
   (b) $\Pr[X \le x] = 1/2$ となる x を求めなさい．
   (c) X の確率密度関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   (d) Y の累積分布関数を求め，式とグラフで表しなさい．
   (e) Y の確率密度関数を求め，式とグラフで表しなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) ジニ係数
   (b) 分割表
   (c) 確率変数
   (d) 分散
2. ベイズの定理
   (a) 確率の乗法定理より

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= \frac{186}{4680}\frac{4680}{863116} \\ &= \frac{186}{863116} \\ &= \frac{93}{431558} \\ &\approx 0.0002 \end{aligned}$$

   - 正しい乗法定理で 2 点． $P(B|A)P(A)$ は簡単に計算できないので 0 点.
   - 小数等による近似的な解答のみは 5 点.

   (b) 条件付き確率の定義より

$$\begin{aligned} P(B|A) &:= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{186/863116}{77526/863116} \\ &= \frac{186}{77526} \\ &= \frac{31}{12921} \\ &\approx 0.0024 \end{aligned}$$

   - 条件付き確率の定義で 2 点.
   - 小数等による近似的な解答のみは 5 点.

(c) 条件付き確率の定義より

$$
\begin{aligned}
P(B|A^c) &:= \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} \\
&= \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \\
&= \frac{P(A^c|B)P(B)}{P(A^c)} \\
&= \frac{(1 - P(A|B))P(B)}{1 - P(A)} \\
&= \frac{(1 - 186/4680)4680/863116}{1 - 77526/863116} \\
&= \frac{4680 - 186}{863116 - 77526} \\
&= \frac{4494}{785590} \\
&= \frac{2247}{392795} \\
&\approx 0.0057
\end{aligned}
$$

- 条件付き確率の定義で 2 点.
- 小数等による近似的な解答のみは 5 点.

3. 1 変量分布の例

(a)

$$
\begin{aligned}
\Pr[1 < X \leq 3] &= \Pr[X \leq 3] - \Pr[X \leq 1] \\
&= F_X(3) - F_X(1) \\
&= \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- $\Pr[X \leq 3] - \Pr[X \leq 1]$ で 2 点.
- $F_X(3) - F_X(1)$ で 5 点.

(b)

$$
\begin{aligned}
F_X(x) = \frac{1}{2} &\implies 1 - \frac{2}{x} = \frac{1}{2} \\
&\implies \frac{2}{x} = \frac{1}{2} \\
&\implies x = 4
\end{aligned}
$$

(c) 任意の $x > 2$ について

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= F_X'(x) \\
&= 2x^{-2}
\end{aligned}
$$

したがって任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$
f_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 2 \\ 2/x^2 & \text{for } x > 2 \end{cases}
$$

グラフは省略.

- 式・グラフ各 5 点.

(d) $X > 2$ より $0 < Y < 1/2$. 任意の $y > 0$ について

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\
&= \Pr\left[\frac{1}{X} \le y\right] \\
&= \Pr\left[X \ge \frac{1}{y}\right] \\
&= 1 - \Pr\left[X < \frac{1}{y}\right] \\
&= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \\
&= \begin{cases} 1 - 0 & \text{for } 1/y \le 2 \\ 1 - [1 - 2/(1/y)] & \text{for } 1/y > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{for } y \ge 1/2 \\ 2y & \text{for } y < 1/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

したがって任意の $y \in \mathbb{R}$ について

$$F_Y(y) := \begin{cases} 0 & \text{for } y \le 0 \\ 2y & \text{for } y \in (0, 1/2) \\ 1 & \text{for } y \ge 1/2 \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式・グラフ各 5 点.
- $\Pr[X \ge 1/y]$ で 2 点.

(e) 任意の $y \in (0, 1/2)$ について

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= F_Y'(y) \\
&= 2
\end{aligned}$$

したがって任意の $y \in \mathbb{R}$ について

$$f_Y(y) := \begin{cases} 2 & \text{for } y \in (0, 1/2) \\ 0 & \text{for } y \notin (0, 1/2) \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式・グラフ各 5 点.