中級統計学：第 2 回中間試験

村澤 康友

2024 年 11 月 12 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，<u>結果のみの解答は 0 点とする</u>）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   （a）結果が 2 通りしかない試行
   （b）確率密度関数が $\phi(z) := \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \mathrm{e}^{-z^2/2}$ である分布
   （c）$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$ と定義される $f_X(.)$
   （d）独立な確率変数の和の分布を求めること
2. （30 点）$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$，$X := 2Z - 3$ とする．
   （a）標準正規分布表を利用して $\Pr[-1 < Z \leq 2]$ を求めなさい．
   （b）X はどのような分布に従うか？
   （c）標準正規分布表を利用して $\Pr[0 < X \leq 2]$ を求めなさい．
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布に従う．

$X \backslash Y$	0	1
0	2/7	2/7
1	1/7	2/7

   （a）X, Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   （b）X, Y の平均と分散をそれぞれ求めなさい．
   （c）XY の平均と分散を求めなさい．
   （d）X と Y の共分散と相関係数を求めなさい．
   （e）$2X - Y$ の平均と分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) ベルヌーイ試行
   (b) 標準正規分布
       - 「正規分布」のみは 1 点.
   (c) 周辺確率密度関数
       - 「周辺分布」は 1 点.
   (d) 畳み込み
2. 正規分布の確率計算
   (a) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ より

$$\begin{aligned}\Pr[-1 < Z \le 2] &= \Pr[Z \le 2] - \Pr[Z \le -1] \\ &= (1 - \Pr[Z > 2]) - \Pr[Z \ge 1] \\ &= 1 - Q(2) - Q(1) \\ &= 1 - .022750 - .15866 \\ &= .81859\end{aligned}$$

   - $\Pr[Z \le 2] - \Pr[Z \le -1]$ で 2 点. $\Pr[Z > -1] - \Pr[Z > 2]$ も可.
   - 負や 1 を超える確率は 0 点. 以下同様.

   (b)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(2Z - 3) \\ &= 2\,\mathrm{E}(Z) - 3 \\ &= -3 \\ \mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(2Z - 3) \\ &= 4\,\mathrm{var}(Z) \\ &= 4\end{aligned}$$

   正規分布の線形変換は正規分布なので $X \sim \mathrm{N}(-3, 4)$.
   - 平均 4 点, 分散 4 点, 正規分布 2 点

   (c) $X \sim \mathrm{N}(-3, 4)$ より

$$\begin{aligned}\Pr[0 < X \le 2] &= \Pr\left[\frac{0-(-3)}{2} < \frac{X-(-3)}{2} \le \frac{2-(-3)}{2}\right] \\ &= \Pr\left[\frac{3}{2} < Z \le \frac{5}{2}\right] \\ &= \Pr\left[Z \le \frac{5}{2}\right] - \Pr\left[Z \le \frac{3}{2}\right] \\ &= \left(1 - \Pr\left[Z > \frac{5}{2}\right]\right) - \left(1 - \Pr\left[Z > \frac{3}{2}\right]\right) \\ &= Q(1.5) - Q(2.5) \\ &= .066807 - .0062097 \\ &= .0605973\end{aligned}$$

   - $\Pr[3/2 < Z \le 5/2]$ で 2 点.

- $\Pr[Z \le 5/2] - \Pr[Z \le 3/2]$ で 4 点．$\Pr[Z > 3/2] - \Pr[Z > 5/2]$ も可．

3. 2 変量離散分布

(a)

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 4/7 \\ 1 & \text{with pr. } 3/7 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/7 \\ 1 & \text{with pr. } 4/7 \end{cases}$$

(b) X の平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 0 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \\ \mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{4}{7} + 1^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \\ \mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{7}\right)^2 \\ &= \frac{12}{49} \end{aligned}$$

Y の平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &:= 0 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ \mathrm{E}\left(Y^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{4}{7} + 1^2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ \mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\ &= \frac{4}{7} - \left(\frac{4}{7}\right)^2 \\ &= \frac{12}{49} \end{aligned}$$

- 平均各 2 点，分散各 3 点．
- 分散の計算公式で各 1 点．

(c) XY の分布は

$$XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 5/7 \\ 1 & \text{with pr. } 2/7 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &:= 0 \cdot \frac{5}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \\ \mathrm{E}\left((XY)^2\right) &:= 0^2 \cdot \frac{5}{7} + 1^2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \\ \mathrm{var}(XY) &= \mathrm{E}\left((XY)^2\right) - \mathrm{E}(XY)^2 \\ &= \frac{2}{7} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 \\ &= \frac{10}{49} \end{aligned}$$

- 平均 5 点，分散 5 点.
- 分散の計算公式で 2 点.

（d）共分散は

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{2}{7} - \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7} \\
&= \frac{2}{49}
\end{aligned}$$

相関係数は

$$\begin{aligned}
\operatorname{corr}(X,Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}} \\
&= \frac{2/49}{12/49} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

- 共分散 5 点，相関係数 5 点.
- 共分散と相関係数の計算公式で各 1 点.

（e）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(2X-Y) &= 2\,\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) \\
&= 2\cdot\frac{3}{7} - \frac{4}{7} \\
&= \frac{2}{7} \\
\operatorname{var}(2X-Y) &= 4\operatorname{var}(X) - 4\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y) \\
&= 4\cdot\frac{12}{49} - 4\cdot\frac{2}{49} + \frac{12}{49} \\
&= \frac{52}{49}
\end{aligned}$$

- 平均 5 点，分散 5 点.
- $\mathrm{E}(2X-Y) = 2\,\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)$ で 2 点.
- $\operatorname{var}(2X-Y) = 4\operatorname{var}(X) - 4\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y)$ で 2 点.

（別解）$2X-Y$ の分布は

$$2X - Y = \begin{cases} -1 & \text{with pr. } 2/7 \\ 0 & \text{with pr. } 2/7 \\ 1 & \text{with pr. } 1/7 \\ 2 & \text{with pr. } 2/7 \end{cases}$$

この平均と分散を (c) と同様に計算してもよい.