中級統計学：第 3 回中間試験

村澤 康友

2025 年 12 月 12 日

注意： 3 問とも解答すること．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと．結果のみや思考過程が読み取れない解答は 0 点とする．

1. （20 点）以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい．
   （a）取り出した個体を母集団に戻しながら繰り返す抽出
   （b）有限個の母数で表せる分布
   （c）推定量の厳密な分布に関する性質
   （d）母数を含む領域を定める推定
2. （30 点）分布表を用いて以下の問いに答えなさい．
   （a）$X \sim \chi^2(4)$ とする．$\Pr[a \leq X \leq b] = 0.95$ となる a, b を求めなさい．
   （b）$Y \sim \mathrm{t}(35)$ とする．$\Pr[Y \leq c] = 0.95$ となる c を求めなさい．
   （c）$Z \sim \mathrm{F}(24, 12)$ とする．$\Pr[d \leq Z \leq e] = 0.95$ となる d, e を求めなさい．
   なお a〜e はすべて正の実数（$0, \infty$ は含まない）とする．
3. （50 点）K 大生の（1 日平均）勉強時間の分布を調べたい．母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と仮定する（μ, σ^2 は未知）．無作為に選んだ K 大生 6 人に勉強時間を尋ねたところ，30 分・50 分・50 分・50 分・90 分・90 分という回答が得られた．
   （a）標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を求めなさい．
   （b）$\bar{X}$ と s^2 はどのような分布をもつか？（証明不要）
   （c）$\bar{X}$ の分散の推定値を求めなさい．
   （d）μ の 95 %信頼区間を求めなさい．
   （e）σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 復元抽出
   (b) パラメトリックな分布
   (c) 有限標本（小標本）特性
   (d) 区間推定
2. 分布表の読み方
   (a)

$$\begin{aligned}\Pr[a \le X \le b] &= \Pr[X \ge a] - \Pr[X > b] \\ &= 0.95\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[X \ge a] &= 0.975 \\ \Pr[X > b] &= 0.025\end{aligned}$$

χ^2 分布表より $X \sim \chi^2(4)$ なら $a = 0.484419,\ b = 11.1433.$

- 各 5 点.

   (b)

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le c] &= 1 - \Pr[Y > c] \\ &= 0.95\end{aligned}$$

すなわち

$$\Pr[Y > c] = 0.05$$

t 分布表より $Y \sim \mathrm{t}(35)$ なら $c = 1.690.$

   (c)

$$\begin{aligned}\Pr[d \le Z \le e] &= 1 - \Pr[Z < d] - \Pr[Z > e] \\ &= 0.95\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}&\Pr[Z < d] = \Pr\left[\frac{1}{Z} > \frac{1}{d}\right] = 0.025 \\ &\Pr[Z > e] = 0.025\end{aligned}$$

$Z \sim \mathrm{F}(24, 12)$ なら $1/Z \sim \mathrm{F}(12, 24)$ なので F 分布表より $1/d = 2.541$，すなわち $d = 1/2.541.$
同じく F 分布表より $Z \sim \mathrm{F}(24, 12)$ なら $e = 3.019.$

- 各 5 点.

3. 母平均・母分散の区間推定
   (a) 標本平均は

$$\begin{aligned}\bar{X} &:= \frac{30 + 50 + 50 + 50 + 90 + 90}{6} \\ &= 60\end{aligned}$$

標本分散は

$$
\begin{aligned}
s^2 &:= \frac{(30-60)^2+(50-60)^2+(50-60)^2+(50-60)^2+(90-60)^2+(90-60)^2}{4} \\
&= \frac{900+100+100+100+900+900}{5} \\
&= 600
\end{aligned}
$$

- 各 5 点.

(b)

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)$$

$$\frac{5s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5)$$

- 各 5 点.
- $n=6$ を代入しなければ各 1 点減.
- 左辺の $5s^2/\sigma^2$ がなければダメ.

(c) $\bar{X}$ の分散の推定値は

$$\frac{s^2}{n} = \frac{600}{6} = 100$$

- $n=6, s^2=600$ を代入しなければダメ.
- (a) の s^2 と整合的なら OK.

(d) $\bar{X}$ を標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/6}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/6}} \sim \mathrm{t}(5)$$

t 分布表より

$$\Pr\left[-2.571 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/6}} \leq 2.571\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\bar{X} - 2.571\sqrt{\frac{s^2}{6}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2.571\sqrt{\frac{s^2}{6}}\right] = 0.95$$

$\bar{X}=60,\ s^2=600$ より μ の 95 %信頼区間は $[34.29, 85.71]$.

- 正しい標準化で 2 点.
- t(5) までは 4 点.
- t 分布表の読み取りまでは 6 点.
- $\bar{X}=60,\ s^2=600$ を正しく代入しなければ 2 点減.

(e) $5s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(5)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[0.83212 \leq \frac{5s^2}{\sigma^2} \leq 12.8352\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{5s^2}{12.8352} \leq \sigma^2 \leq \frac{5s^2}{0.83212}\right] = 0.95$$

$s^2 = 600$ より σ^2 の 95 %信頼区間は $[3000/12.8352, 3000/0.83212] \approx [233.73, 3605.25]$.

- χ^2 分布表の読み取りまでは 5 点.
- $s^2 = 600$ を代入しなければ 2 点減.