

中級統計学：第 1 回中間模擬試験

村澤 康友

2026 年 10 月 23 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、授業終了時に提出すること。

1. (30 点)「交通安全白書（令和 5 年）」によると、平成 25～令和 4 年の日本の自転車乗用中の交通事故死者数は 4,680 人、同負傷者数は 858,436 人であった。また死傷者（死者または負傷者）863,116 人中のヘルメット着用者数は 77,526 人、死者 4,680 人中のヘルメット着用者数は 186 人であった。すなわち交通事故におけるヘルメット着用の事象を A 、交通事故死の事象を B とすると、

$$P(A) = \frac{77526}{863116} \approx 0.09$$

$$P(B) = \frac{4680}{863116} \approx 0.005$$

$$P(A|B) = \frac{186}{4680} \approx 0.04$$

以下の確率を分数で正確に求めなさい。

- (a) $P(A \cap B)$
 - (b) $P(B|A)$ （ヘルメット着用者の致死率）
 - (c) $P(B|A^c)$ （ヘルメット非着用者の致死率）
2. (20 点) 次の確率変数を考える。

$$X := \begin{cases} 3 & \text{with pr. } 1/4 \\ 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/4 \end{cases}$$

- (a) X の期待値を求めなさい。
 - (b) X の分散を求めなさい。
3. (50 点) X は次の累積分布関数をもつ。

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x^2/100 & \text{for } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{for } 10 < x \end{cases}$$

$Y := X/2$ とする。

- (a) $\Pr[1 < X \leq 2]$ を求めなさい。
- (b) $\Pr[1 < Y \leq 2]$ を求めなさい。
- (c) X の確率密度関数を求めなさい。
- (d) Y の累積分布関数を求めなさい。
- (e) Y の確率密度関数を求めなさい。

解答例

1. ベイズの定理

(a) 確率の乗法定理より

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\&= \frac{186}{4680} \frac{4680}{863116} \\&= \frac{186}{863116} \\&= \frac{93}{431558} (\approx 0.0002)\end{aligned}$$

(b) 条件付き確率の定義より

$$\begin{aligned}P(B|A) &:= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\&= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\&= \frac{186/863116}{77526/863116} \\&= \frac{186}{77526} \\&= \frac{31}{12921} (\approx 0.0024)\end{aligned}$$

(c) 条件付き確率の定義より

$$\begin{aligned}P(B|A^c) &:= \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} \\&= \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \\&= \frac{P(A^c|B)P(B)}{P(A^c)} \\&= \frac{(1 - P(A|B))P(B)}{1 - P(A)} \\&= \frac{(1 - 186/4680)4680/863116}{1 - 77526/863116} \\&= \frac{4680 - 186}{863116 - 77526} \\&= \frac{4494}{785590} \\&= \frac{2247}{392795} (\approx 0.0057)\end{aligned}$$

2. 離散分布の期待値と分散

(a) 期待値の定義より

$$\begin{aligned} E(X) &:= 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

(b) 2 乗の期待値は

$$\begin{aligned} E(X^2) &:= 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

分散の計算公式より

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{11}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\ &= \frac{11}{4} - \frac{25}{16} \\ &= \frac{19}{16} \end{aligned}$$

3. 連続確率変数の変換

(a)

$$\begin{aligned}\Pr[1 < X \leq 2] &= \Pr[X \leq 2] - \Pr[X \leq 1] \\ &= F_X(2) - F_X(1) \\ &= \frac{2^2}{100} - \frac{1^2}{100} \\ &= \frac{3}{100}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\Pr[1 < Y \leq 2] &= \Pr\left[1 < \frac{X}{2} \leq 2\right] \\ &= \Pr[2 < X \leq 4] \\ &= \Pr[X \leq 4] - \Pr[X \leq 2] \\ &= F_X(4) - F_X(2) \\ &= \frac{4^2}{100} - \frac{2^2}{100} \\ &= \frac{12}{100} \\ &= \frac{3}{25}\end{aligned}$$

(c) $f_X(\cdot) = F'_X(\cdot)$ より

$$f_X(x) = \begin{cases} x/50 & \text{for } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr\left[\frac{X}{2} \leq y\right] \\ &= \Pr[X \leq 2y] \\ &= F_X(2y) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } 2y < 0 \\ (2y)^2/100 & \text{for } 0 \leq 2y \leq 10 \\ 1 & \text{for } 10 < 2y \end{cases}\end{aligned}$$

すなわち

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ y^2/25 & \text{for } 0 \leq y \leq 5 \\ 1 & \text{for } 5 < y \end{cases}$$

(e) $f_Y(\cdot) = F'_Y(\cdot)$ より

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y/25 & \text{for } 0 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$