

中級統計学：復習テスト 7

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 10 月 16 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1~8 をまとめて左上でホチキス止めし、第 1 回中間試験実施日（10 月 23 日の予定）に提出すること。

1. 次の確率変数を考える。

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1 - p \end{cases}$$

(a) $E(X)$ を求めなさい。

(b) $E(X^2)$ を求めなさい。

(c) $\text{var}(X)$ を求めなさい。

2. 確率変数 X について以下の公式が成り立つことを示しなさい。(ヒント：復習テスト 2 で似た公式を示した.)

(a)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(b)

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

(c)

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned} E(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(X^2) &:= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

(c) $E(X) = p$ より

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &:= (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) \\ &= p(1 - p)^2 + p^2(1 - p) \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

2. (a) X が連続なら

$$\begin{aligned} E(aX + b) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f_X(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

(b)

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &:= E((aX + b - E(aX + b))^2) \\ &= E([aX + b - (aE(X) + b)]^2) \\ &= E([a(X - E(X))]^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) \\ &= a^2 E((X - E(X))^2) \\ &= a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &:= E((X - \mu_X)^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \end{aligned}$$