

中級統計学：復習テスト 10

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 10 月 30 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～13 を左上でホチキス止めし、第 2 回中間試験実施日（11 月 17 日の予定）にまとめて提出すること。

1. $U \sim U[a, b]$ とする。

(a) $E(U)$ を求めなさい。

(b) $E(U^2)$ を求めなさい。

(c) $\text{var}(U)$ を求めなさい。

2. $X \sim N(1, 9)$ とする. 標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい.

(a) $\Pr[X \leq 0]$

(b) $\Pr[1 < X \leq 2]$

(c) $\Pr[X > 3]$

(d) $\Pr[-4 < X \leq 5]$

(e) $\Pr[|X| \geq 6]$

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned} E(U) &:= \int_{-\infty}^a u \cdot 0 \, du + \int_a^b u \cdot \frac{1}{b-a} \, du + \int_b^{\infty} u \cdot 0 \, du \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(U^2) &:= \int_{-\infty}^a u^2 \cdot 0 \, du + \int_a^b u^2 \cdot \frac{1}{b-a} \, du + \int_b^{\infty} u^2 \cdot 0 \, du \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^3}{3} \right]_a^b \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{var}(U) &= E(U^2) - E(U)^2 \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{12} - \frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{12} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} \\ &= \frac{(a-b)^2}{12} \end{aligned}$$

2. $Q(\cdot) := 1 - \Phi(\cdot)$ とする. 教科書の標準正規分布表は $Q(\cdot)$ の値を記載している. $\Phi(\cdot)$ や $\Phi(\cdot) - .5$ の値を記載する場合もあるので要注意.

(a)

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq 0] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{0-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= Q\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= .37070 \end{aligned}$$

(b)

$$\Pr[1 < X \leq 2] = \Pr[X \leq 2] - \Pr[X \leq 1]$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq 2] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{2-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - .37070 \\ &= .62930 \\ \Pr[X \leq 1] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{1-1}{3}\right] \\ &= \Phi(0) \\ &= .5\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[1 < X \leq 2] &= .62930 - .5 \\ &= .12930\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\Pr[X > 3] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} > \frac{3-1}{3}\right] \\ &= Q\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= .25143\end{aligned}$$

(d)

$$\Pr[-4 < X \leq 5] = \Pr[X \leq 5] - \Pr[X \leq -4]$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq 5] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{5-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - .091759 \\ &= .908241 \\ \Pr[X \leq -4] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{-4-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= Q\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= .047460\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[-4 < X \leq 5] &= .908241 - .047460 \\ &= .860781\end{aligned}$$

(e)

$$\Pr[|X| \geq 6] = \Pr[X \leq -6] + \Pr[X \geq 6]$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq -6] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{-6-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) \\ &= Q\left(\frac{7}{3}\right) \\ &= .0099031\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 6] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \geq \frac{6-1}{3}\right] \\ &= Q\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= .047460\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[|X| \geq 6] &= .0099031 + .047460 \\ &= .0573631\end{aligned}$$