中級統計学：復習テスト 11

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 11 月 6 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜13 を左上でホチキス止めし，第 2 回中間試験実施日（11 月 17 日の予定）にまとめて提出すること．

1. (X, Y) を確率ベクトルとする．以下の公式を示しなさい．

   (a)
   $$\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$$

   (b)
   $$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{var}(X) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y) + b^2\,\mathrm{var}(Y)$$

   (c)
   $$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

2. (X, Y) を確率ベクトルとする.

(a) X と Y の独立性の定義を書きなさい.

(b) X と Y は独立とする. このとき以下の式が成り立つことを示しなさい.

i.
$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

ii.
$$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$$

iii.
$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

解答例

1. (a) (X,Y) が連続なら

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(axf_{X,Y}(x,y)+byf_{X,Y}(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}axf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}byf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

離散の場合も同様.

(b) 前問の結果（期待値の線形性）より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(aX+bY) &:= \mathrm{E}\left((aX+bY-\mathrm{E}(aX+bY))^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left([aX+bY-(a\,\mathrm{E}(X)+b\,\mathrm{E}(Y))]^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left((aX-a\,\mathrm{E}(X)+bY-b\,\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left([a(X-\mathrm{E}(X))+b(Y-\mathrm{E}(Y))]^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(a^2(X-\mathrm{E}(X))^2+2ab(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))+b^2(Y-\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= a^2\,\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right)+2ab\,\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))+b^2\,\mathrm{E}\left((Y-\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= a^2\,\mathrm{var}(X)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)+b^2\,\mathrm{var}(Y)
\end{aligned}$$

(c) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &:= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) \\
&= \mathrm{E}(XY-X\,\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)Y+\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)) \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)+\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

2. (a) 任意の (x,y) について

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$$

なら X と Y は独立という.

(b) i. (X,Y) が連続なら

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x\right)yf_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

離散の場合も同様.

ii. 前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

iii. 前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X + Y) &= \operatorname{var}(X) + 2\operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}(Y) \\ &= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)\end{aligned}$$