中級統計学：復習テスト 12

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 11 月 10 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜13 を左上でホチキス止めし，第 2 回中間試験実施日（11 月 17 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $\boldsymbol{x} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とする．ただし

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

（a）$\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の同時 pdf を書きなさい．

（b）$\det(\boldsymbol{\Sigma})$ と $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ を求めなさい．

（c）$\sigma_{12} = 0$ なら x_1 と x_2 は独立であることを示しなさい．（ヒント：同時 pdf ＝周辺 pdf の積，すなわち $f_{1,2}(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ となることを示せばよい．）

2. (X, Y) を確率ベクトルとする．

（a）（1 変量分布の）mgf の定義を書きなさい．

（b）X と Y が独立なら $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ となることを示しなさい．

3. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ と $Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ は独立とする．

（a）X, Y の mgf を書きなさい．

（b）$X + Y$ の mgf を求めなさい．

解答例

1. (a)

$$f(\boldsymbol{x}) := (2\pi)^{-n/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

ただし $n := 2$.

(b)

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{\Sigma}) &= \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 \\
\boldsymbol{\Sigma}^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(c) $\sigma_{12} = 0$ なら

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{\Sigma}) &= \sigma_1^2\sigma_2^2 \\
\boldsymbol{\Sigma}^{-1} &= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &:= (2\pi)^{-1} \left(\sigma_1^2\sigma_2^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (2\pi)^{-1} \left(\sigma_1^2\sigma_2^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right) \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left(\sigma_1^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) (2\pi)^{-1/2} \left(\sigma_2^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\
&= f_1(x_1) f_2(x_2)
\end{aligned}$$

ただし $f_1(.)$, $f_2(.)$ は x_1, x_2 の周辺 pdf. 同時 pdf =周辺 pdf の積なので x_1 と x_2 は独立.

2. (a) X の mgf は

$$M_X(t) := \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

(b) X と Y が独立なら

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(X+Y)}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX+tY}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tY}\right) \\
&= M_X(t) M_Y(t)
\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right) \\
M_Y(t) &= \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\
&= \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right)\exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right) \\
&= \exp\left((\mu_X + \mu_Y)t + \frac{\left(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$