

中級統計学：復習テスト 13

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023年11月13日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト9～13を左上でホチキス止めし、第2回中間試験実施日（11月17日の予定）にまとめて提出すること。

1. $\{X_i\}$ は平均 μ ，分散 σ^2 の独立かつ同一な分布をもつ。

(a) (X_1, \dots, X_n) の標本平均 \bar{X} を式で定義しなさい。

(b) \bar{X} の平均（期待値）を求めなさい。

(c) \bar{X} の分散を求めなさい。

(d) \bar{X} の漸近分布を求めなさい。

2. $\{U_i\}$ は独立に $U[0, 1]$ にしたがう. (U_1, \dots, U_{12}) の標本平均を \bar{U} とする.

(a) U_i の期待値を求めなさい (教科書 pp. 95-96 〈例〉 参照).

(b) U_i の 2 次の積率を求めなさい (教科書 p. 98 〈例〉 参照).

(c) U_i の分散を求めなさい.

(d) \bar{U} の期待値を求めなさい.

(e) \bar{U} の分散を求めなさい.

(f) \bar{U} の漸近分布を求めなさい. (注: $N(0, 1)$ ではない.)

解答例

1. (a)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(b) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{E(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \\ &= \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} \\ &= \mu \end{aligned}$$

(c) X_1, \dots, X_n は独立なので

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}) &= \text{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\text{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\text{var}(X_1) + \cdots + \text{var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

(d) 中心極限定理より

$$\bar{X} \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2. (a)

$$\begin{aligned} E(U) &= \int_0^1 u \, du \\ &= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(U^2) &= \int_0^1 u^2 \, du \\ &= \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{var}(U) &= E(U^2) - E(U)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

(d) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}E(\bar{U}) &= E\left(\frac{U_1 + \cdots + U_{12}}{12}\right) \\ &= \frac{E(U_1) + \cdots + E(U_{12})}{12} \\ &= \frac{1/2 + \cdots + 1/2}{12} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(e) U_1, \dots, U_{12} は独立なので

$$\begin{aligned}\text{var}(\bar{U}) &= \text{var}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_{12}}{12}\right) \\ &= \frac{\text{var}(U_1 + \cdots + U_{12})}{12^2} \\ &= \frac{\text{var}(U_1) + \cdots + \text{var}(U_{12})}{12^2} \\ &= \frac{1/12 + \cdots + 1/12}{12^2} \\ &= \frac{1}{144}\end{aligned}$$

(f) 中心極限定理より

$$\bar{U} \stackrel{d}{\sim} N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{144}\right)$$