

中級統計学：復習テスト 17

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 12 月 1 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 14～20 を順に重ねて左上でホチキス止めし、第 3 回中間試験実施日（12 月 15 日の予定）に提出すること。

1. $N(\mu_X, \sigma^2), N(\mu_Y, \sigma^2)$ から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ とする。

(a) 標本平均 \bar{X}, \bar{Y} の分布をそれぞれ求めなさい。

(b) $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布を求めなさい。

(c) プールした標本分散 s^2 を式で定義しなさい。

(d) $(m + n - 2)s^2/\sigma^2$ はどのような分布をもつか？

(e) $[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)]/\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}$ はどのような分布をもつか？

2. $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ とする.
(a) 標本分散 s_X^2, s_Y^2 をそれぞれ式で定義しなさい (μ_X, μ_Y は未知).

(b) $(m-1)s_X^2/\sigma_X^2, (n-1)s_Y^2/\sigma_Y^2$ はそれぞれどのような分布をもつか?

(c) $(s_X^2/s_Y^2)/(\sigma_X^2/\sigma_Y^2)$ はどのような分布をもつか?

3. $N(\mu_X, \sigma^2), N(\mu_Y, \sigma^2)$ から独立に抽出した大きさ 10, 15 の無作為標本の標本分散をそれぞれ s_X^2, s_Y^2 とする. $s_X^2/s_Y^2 > 3$ の確率を F 分布表を利用して求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma^2}{m}\right) \\ \bar{Y} &\sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma^2}{n}\right)\end{aligned}$$

(b)

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(c)

$$s^2 := \frac{1}{m+n-2} \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right]$$

(d)

$$\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

(e)

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim t(m+n-2)$$

2. (a)

$$\begin{aligned}s_X^2 &:= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \\ s_Y^2 &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} &\sim \chi^2(m-1) \\ \frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} &\sim \chi^2(n-1)\end{aligned}$$

(c)

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

3.

$$\begin{aligned}\Pr\left[\frac{s_X^2}{s_Y^2} > 3\right] &= \Pr[F(9, 14) > 3] \\ &\approx .03\end{aligned}$$