中級統計学：復習テスト 20

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 12 月 18 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 22 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とする．
   (a) $\bar{X}$ の分布を求めなさい．

   (b) σ^2 を既知として μ の 95 %信頼区間を求めなさい．

2. $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本分散を s^2 とする．
   (a) s^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

   (b) $n=10$ として σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

3. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$, $\mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本分散を s_X^2, s_Y^2 とする．

（a）s_X^2, s_Y^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

（b）s_X^2/s_Y^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：同上）

（c）$m = 4,\ n = 6$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. (a)

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(b) 標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

標準正規分布表より

$$\Pr\left[-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = .95$$

したがって μ の 95 %信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

2. (a)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b) χ^2 分布表より

$$\Pr\left[2.70039 \leq \frac{9s^2}{\sigma^2} \leq 19.0228\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{19.0228} \leq \frac{\sigma^2}{9s^2} \leq \frac{1}{2.70039}\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\frac{9s^2}{19.0228} \leq \sigma^2 \leq \frac{9s^2}{2.70039}\right] = .95$$

したがって σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{9}{19.0228}s^2, \frac{9}{2.70039}s^2\right]$$

3. (a)

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b)

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

(c) F 分布表より

$$\Pr\left[\frac{1}{14.885} \leq \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \leq 7.764\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764} \leq \frac{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}{s_X^2/s_Y^2} \leq 14.885\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764}\frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq 14.885\frac{s_X^2}{s_Y^2}\right] = .95$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{1}{7.764}\frac{s_X^2}{s_Y^2}, 14.885\frac{s_X^2}{s_Y^2}\right]$$