

中級統計学：復習テスト 25

学籍番号 _____ 氏名 _____

2024 年 1 月 22 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 21～26 を順に重ねて左上でホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 26 日の予定）に提出すること。

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ とする。 y_i の x_i 上への定数項のない古典的線形回帰モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$

$$E(u_i) = 0$$

$$\text{var}(u_i) = \sigma^2$$

$$\text{cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

β の OLS 推定量を b とする。

(a) b を式で与えなさい。

(b) b の期待値を求めなさい。

(c) b の分散を求めなさい。

2. 2 変量データを $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ とする. y_i の x_i 上への定数項のない古典的正規線形回帰モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$
$$\{u_i\} \sim \text{IN}(0, \sigma^2)$$

β の OLS 推定量を b とする. σ^2 を既知として次の片側検定問題を考える.

$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta > c$$

(a) b の分布を求めなさい.

(b) 検定統計量を与えなさい.

(c) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい.

(d) 有意水準 5 % の検定の棄却域を定めなさい.

(e) 検定統計量の値が 2.0 のとき p 値を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b) 前問の式に回帰式 $y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(b) &= E\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta \end{aligned}$$

(c) u_1, \dots, u_n は無相関で分散が均一なので

$$\begin{aligned} \text{var}(b) &= \text{var}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\ &= \text{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\ &= \frac{\text{var}(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{\text{var}(x_1 u_1) + \dots + \text{var}(x_n u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{x_1^2 \text{var}(u_1) + \dots + x_n^2 \text{var}(u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{x_1^2 \sigma^2 + \dots + x_n^2 \sigma^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

2. (a) b は (y_1, \dots, y_n) の線形変換だから正規分布. Q1(b)(c) より

$$b \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

(b) 前問の結果を標準化すると

$$\frac{b - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim N(0, 1)$$

$H_0 : \beta = c$ を代入すると、検定統計量は

$$Z := \frac{b - c}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(c) H_0 の下で

$$Z \sim N(0, 1)$$

(d) 標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = .05$$

したがって棄却域は $[1.65, \infty)$.

(e) 標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 2.00] = .02275$$

したがって p 値 = .02275.